Estimation and Hypothesis Testing 1 | *L'estimation et les tests d'hypothèses 1*

Yannick + Vin; Alyssa + Macartan

2026-06-12

Estimation and Hypothesis Testing

L'estimation et les tests d'hypothèses

- We have randomly assigned treatment and collected our outcome data.
- Now we use that data for:
  - **Estimation**: produce an estimate of the true treatment effect
  - **Hypothesis testing**: assess how consistent the results are with there being no effect

- Le traitement a été assigné de façon aléatoire et nous avons mesuré les résultats.
- Nous utilisons maintenant ces données pour :
  - **Estimation** : produire une estimation du véritable effet du traitement
  - **Test d'hypothèse** : évaluer la cohérence des résultats avec l'absence d'effet

Section 1

Estimation

- Remember that there is a *true* ATE but we can't observe it because of the fundamental problem of causal inference. This is our target, our **estimand**.
    - For example, the ATE.
- We use our data to make an educated guess, our **estimate**.
    - $\widehat{ATE}$
- If we run the experiment again, different units may be assigned to treatment, and our estimate will likely be different.

- Rappelez qu'il y a un *vrai* ATE, mais nous ne pouvons pas l'observer à cause du problème fondamental de l'inférence causale. C'est notre cible, notre **paramètre**.
    - Par exemple, l'ATE.
- Nous utilisons nos données pour faire une supposition éclairée, notre **estimation**.
    - $\widehat{ATE}$
- Si nous renouvelons l'expérience, différentes unités peuvent être assignées au traitement, et notre estimation sera probablement différente.

Estimators

Estimateurs

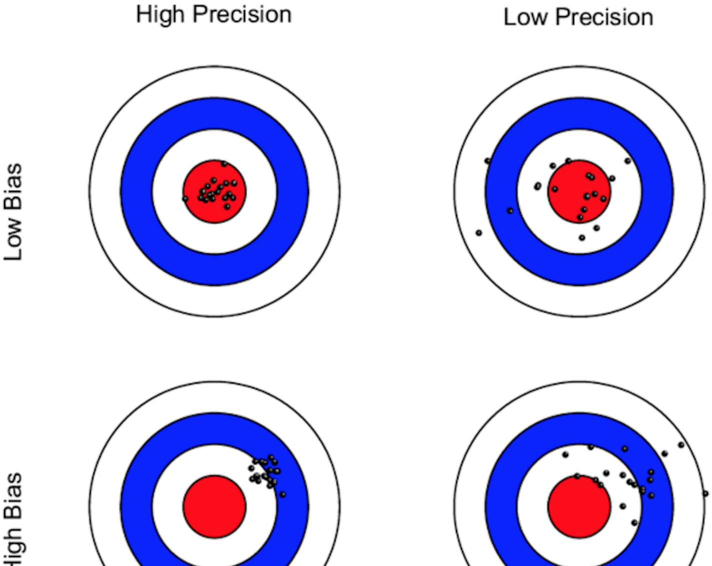
- The procedure we apply to our data to produce this estimate is our **estimator**.
- There are many possible estimators for the same estimand.
- We will introduce several estimators that are commonly used to analyze experiments.

- **L'estimateur** est comment on devine la valeur du paramètre à partir des données dont on dispose (les données observées).
- Il y a plusieurs estimateurs possibles pour le même paramètre.
- Nous présenterons plusieurs estimateurs couramment utilisés pour analyser des expériences.

Estimators
Estimateurs

- In general, we prefer estimators that are:
  - **Unbiased**: If we run the experiment many times, each estimate might be a little too high or low, but it will be correct on average.
  - **Precise**: The estimates do not vary much from one run of the experiment to another.
- The best: unbiased and precise.

- En général, nous préférons les estimateurs qui sont :
  - **Non biaisés** : si vous exécutez l'expérience plusieurs fois, l'estimation peut parfois être trop élevée ou trop faible, mais elle sera correcte en moyenne.
  - **Précis** : les estimations ne varient pas beaucoup d'une exécution de l'expérience à l'autre.
- Le meilleur : non biaisé et précis.



High Precision
Low Precision
Low Bias
High Bias

General principle: Analyze as you randomize

Un principe général : analysez comme vous randomisez

- This means follow the design of the experiment.
- Compare groups that are created by random assignment.

- Cela signifie suivre la conception de l'expérience.
- Comparez les groupes créés par l'assignation aléatoire.

Estimator 1: Difference-in-means

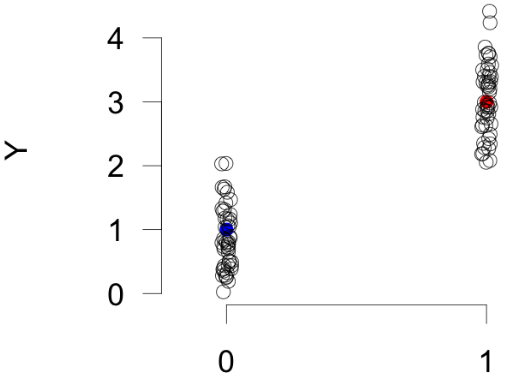
Estimateur 1 : la différence des moyennes

- We have a simple experiment:
  - Random assignment to treatment or control.
  - All units have the same probability of treatment assignment.
  - Our *estimand* is the ATE.
- The simplest *estimator* for the ATE is the **difference-in-means**: take the average outcome for the treatment group and subtract the average outcome for the control group.

- Nous avons une expérience simple :
  - Assignation aléatoire au traitement ou au contrôle.
  - Toutes les unités ont la même probabilité de recevoir le traitement.
  - Notre *paramètre* est l'ATE.
- L'estimateur le plus simple de l'ATE est **la différence des moyennes** : soustrayez la moyenne des unités assignées au contrôle de la moyenne des unités assignées au traitement.

Estimator 1: Difference-in-means

Estimateur 1 : la différence des moyennes



Estimator 1: Difference-in-means

Estimateur 1 : la différence des moyennes

Unit	Z_i	Y_i	$Y_i(1)$	$Y_i(0)$
a	1	5	5	
b	1	4	4	
c	1	2	2	
d	1	1	1	
e	0	1		1
f	0	1		1
g	0	0		0
h	0	2		2

$$\frac{5+4+2+1}{4} - \frac{1+1+0+2}{4} = 3 - 1 = 2$$

Estimator 1: Difference-in-means

Estimateur 1 : la différence des moyennes

```r
mean(Y[treatment==1]) - mean(Y[treatment==0])

library(estimatr)
difference_in_means(Y ~ treatment)
```

Estimator 2: Linear regression
Estimateur 2 : la régression linéaire

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + e_i$$

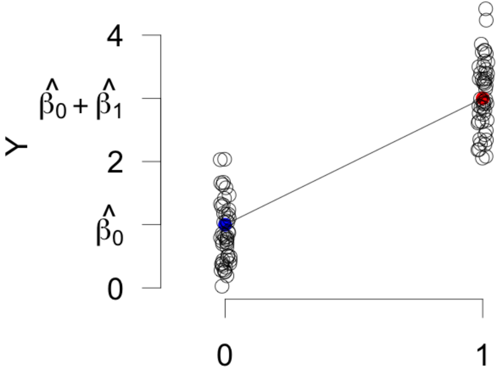
- With this simple experiment, we can also use a linear regression. It will produce exactly the same estimate ($\hat{\beta}_1$) of the ATE as the difference-in-means estimator.
- $\hat{\beta}_0$ is the average outcome in the control group.

- Pour cette expérience simple, nous pouvons également utiliser la régression linéaire. Elle produira exactement la même estimation ($\hat{\beta}_1$) de l'ATE que l'estimateur de la différence des moyennes.
- $\hat{\beta}_0$ est le résultat moyen des unités assignées au contrôle.

Estimator 2: Linear regression

Estimateur 2 : la régression linéaire

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + e_i$$



Estimator 2: Linear regression

Estimateur 2 : la régression linéaire

```
lm(Y ~ treatment)
```

Section 2

Hypothesis Testing

Hypothesis: A woman is pregnant

Hypothèse : une femme est enceinte

Truth: the woman is pregnant

La vérité : la femme est enceinte

Type I and Type II errors

Erreurs de type I et de type II

	Reject H_0	Do not reject H_0
H_0 **true** (no effect)	Type I error (α)	Correct
H_0 **false** (effect exists)	Correct (power $= 1 - \beta$)	Type II error (β)

	Rejeter H_0	Ne pas rejeter H_0
H_0 **vraie** (aucun effet)	Erreur de type I (α)	Correct
H_0 **fausse** (effet existant)	Correct (puissance $= 1 - \beta$)	Erreur de type II (β)

- **Type I error** (α): reject H_0 when H_0 is true — a false positive.
- **Type II error** (β): fail to reject H_0 when H_0 is false — a false negative.
- **Power** $= 1 - \beta$: probability of correctly rejecting H_0 when there is an effect.

- **Erreur de type I** (α) : rejeter H_0 alors que H_0 est vraie — un faux positif.
- **Erreur de type II** (β) : ne pas rejeter H_0 alors que H_0 est fausse — un faux négatif.
- **Puissance** $= 1 - \beta$: probabilité de rejeter correctement H_0 lorsqu'il y a un effet.

Hypothesis Testing

Les tests d'hypothèses

- Let's say that the truth is that a medicine has no effect on height. But all the short people were randomly assigned to the medicine and all the tall people to control.
- If we apply the difference in means, it looks like the medicine made people shorter!

- Supposons qu'un médicament n'ait aucun effet sur la taille. Mais toutes les personnes de petite taille ont été assignées au médicament et les personnes de grande taille au contrôle.
- Si on utilise la différence de moyennes, on dirait que le médicament a rendu les gens plus petits !

Hypothesis Testing

Les tests d'hypothèses

- Warning: We can get an estimate that is not zero even when there is no effect!
- Are we confident that our non-zero estimate reflects a truly non-zero estimand (truth)?

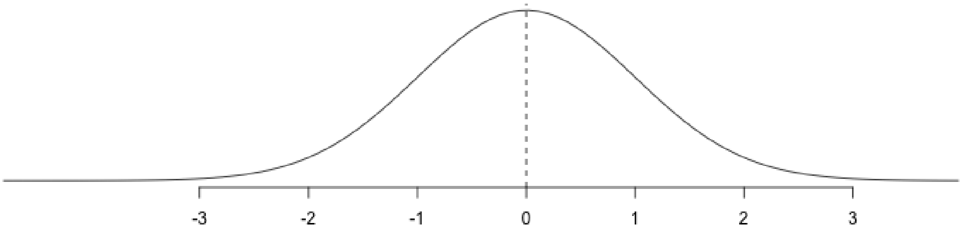
- Avertissement : on peut obtenir une estimation non nulle même s'il n'y a aucun effet !
- Sommes-nous convaincus que notre estimation non nulle reflète un paramètre véritablement non nul (la vérité) ?

Hypothesis Testing
Les tests d'hypothèses

- **Hypothesis**: a claim about the world that we will evaluate with data.
  - A good hypothesis is specific and falsifiable.
- Start with a **null hypothesis**, a claim we might reject when we examine the data. We will use the null hypothesis that the true ATE is 0.
- But remember that we can get $\widehat{ATE}$ that is not 0, just by chance.

- **Hypothèse** : une affirmation sur le monde que nous évaluerons à l'aide de données.
  - Une bonne hypothèse est spécifique et réfutable.
- Commencer par une **hypothèse nulle**, une affirmation que nous pourrions rejeter lorsque nous examinons les données. Nous utiliserons l'hypothèse nulle que le vrai ATE est 0.
- Mais rappelez-vous que nous pouvons obtenir un $\widehat{ATE}$ différent de 0 par hasard.

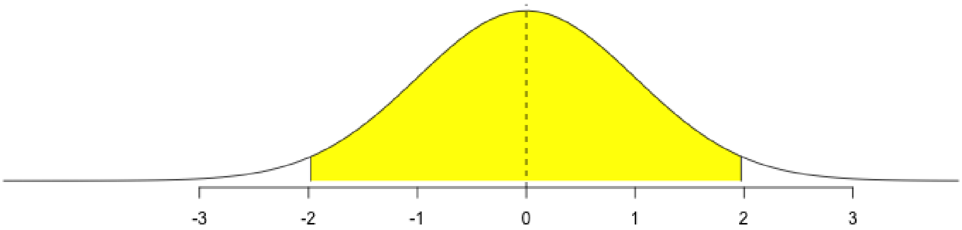
Hypothesis Testing
Les tests d'hypothèses



- Distribution of possible $\widehat{ATE}$ if the null hypothesis is true
- Distribution des $\widehat{ATE}$ possibles si l'hypothèse nulle est vraie

Hypothesis Testing

Les tests d'hypothèses



- Rejection (white) and non-rejection (yellow) regions for a two-sided alternative hypothesis at $\alpha = 0.05$

- Régions de rejet (blanche) et de non-rejet (jaune) pour une hypothèse alternative bilatérale à $\alpha = 0{,}05$

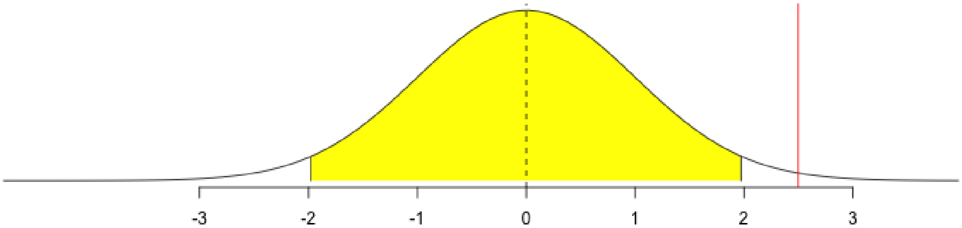
Hypothesis Testing
Les tests d'hypothèses

- α is a value that you choose/set **before** hypothesis testing. It is often 0.05 or 5% in the social sciences.
- α of the area under the curve is in the rejection region.

- α est une valeur que vous choisissez / fixez **avant** le test d'hypothèse. Il s'agit souvent de 0,05 ou de 5 % dans les sciences sociales.
- La proportion α de l'aire sous la courbe se trouve dans la région de rejet.

Hypothesis Testing

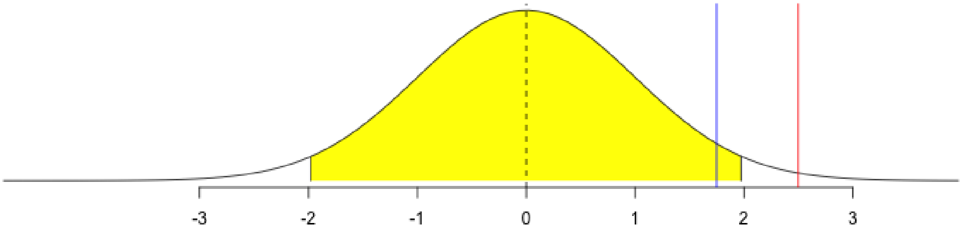
Les tests d'hypothèses



- $\widehat{ATE}$ falls in the rejection region $\rightarrow$ reject the null hypothesis
- $\widehat{ATE}$ se situe dans la région de rejet $\rightarrow$ rejetez l'hypothèse nulle

Hypothesis Testing

Les tests d'hypothèses

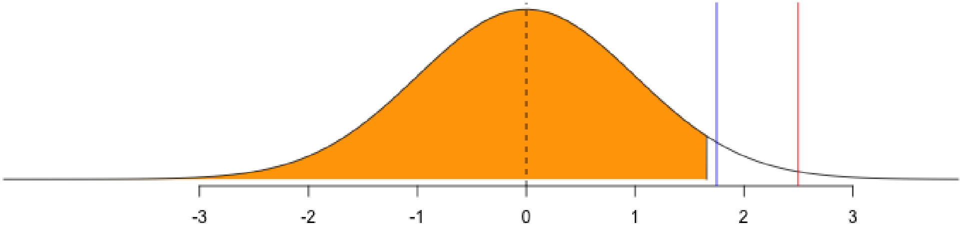


- $\widehat{ATE}$ falls outside the rejection region $\rightarrow$ do not reject the null hypothesis

- $\widehat{ATE}$ se situe en dehors de la région de rejet $\rightarrow$ ne rejetez pas l'hypothèse nulle

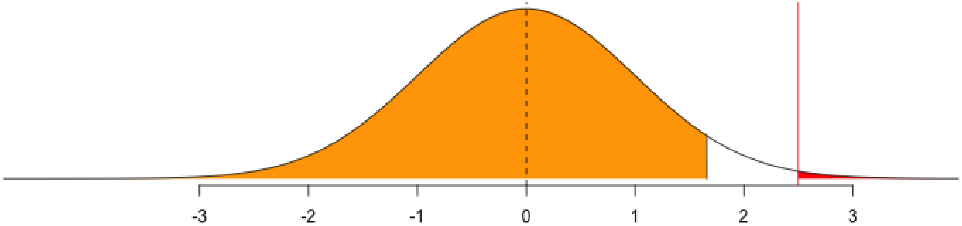
Hypothesis Testing

Les tests d'hypothèses



- Rejection and non-rejection regions for a one-sided alternative hypothesis at $\alpha = 0.05$
- Régions de rejet et de non-rejet pour une hypothèse alternative unilatérale à $\alpha = 0{,}05$

p-value
p-valeur



- p-**value**: For a one-sided test, the probability of seeing a *test statistic* as large as or larger than the test statistic calculated from observed data when the null hypothesis is true.

- p-**valeur** : pour un test d'hypothèse unilatéral, la probabilité de voir une *statistique de test* aussi grande ou plus grande que la statistique de test calculée à partir des données observées lorsque l'hypothèse nulle est vraie.

Hypothesis Testing with Linear Regression

Les tests d'hypothèses avec la régression linéaire

- There are many ways to do hypothesis testing. We are going to take the simplest approach that uses regression.
- Use linear regression to calculate a p-value (two-sided test).

- Il existe de nombreuses façons de tester des hypothèses. Nous allons utiliser l'approche la plus simple : la régression.
- Utiliser la régression linéaire pour calculer une p-valeur (test bilatéral).

Hypothesis Testing with Linear Regression

Les tests d'hypothèses avec la régression linéaire

- Compare this p-value to α, a standard we have set in advance.
- α is the probability of making the mistake of rejecting the null hypothesis when we should not.

- Comparez cette p-valeur à α, une norme que nous avons fixée à l'avance.
- α est la probabilité de faire l'erreur de rejeter l'hypothèse nulle alors que nous ne devrions pas le faire.

Hypothesis Testing with Linear Regression
Les tests d'hypothèses avec la régression linéaire

- If the p-value is smaller than or equal to the α level, we reject the null hypothesis of no effect.
- If the p-value is greater than the α level, we fail to reject the null hypothesis of no effect.
- Remember: We do not accept the null.

- Si la p-valeur est plus petite ou égale au niveau α, nous rejetons l'hypothèse nulle d'aucun effet.
- Si la p-valeur est plus grande que le niveau α, nous ne parvenons pas à rejeter l'hypothèse nulle d'aucun effet.
- Rappel : nous n'acceptons pas l'hypothèse nulle.

Hypothesis Testing with Linear Regression

Les tests d'hypothèses avec la régression linéaire

```r
lm_robust(Energy ~ Coffee, data = df)
```

Statistical models

Model 1

(Intercept)

0.77***

(0.15)

Coffee

0.51*

(0.21)

Section 3

Covariate Adjustment

Estimator: Linear regression with covariates

Estimateur : la régression linéaire avec des covariables

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 Z_i + \gamma X_i + e_i$$

- We can include a **pre-treatment covariate** X that is *predictive of* the outcome variable in our regression model.
- Think of X as fixed before the randomization. For example: pre-treatment measure of the outcome.
- Careful: This can bias our estimates, but improve their precision.

- Nous pouvons inclure une **covariable pré-traitement** X qui est *prédictive* de la variable de résultat dans notre modèle de régression.
- Considérez que X est fixé avant la randomisation. Par exemple : une mesure du résultat avant le traitement.
- Attention : cela peut biaiser nos estimations, mais améliorer leur précision.

Estimator: Linear regression with covariates

Estimateur : la régression linéaire avec des covariables

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 Z_i + \gamma X_i + e_i$$

- The estimated coefficient on the treatment variable ($\hat{\beta}_1$) is again our $\widehat{ATE}$.
- The estimated coefficient on the covariate ($\hat{\gamma}$) is *not* the causal effect of that variable.

- Le coefficient estimé sur la variable de traitement ($\hat{\beta}_1$) est encore notre $\widehat{ATE}$.
- Le coefficient estimé de la covariable ($\hat{\gamma}$) n'est *pas* l'effet causal de cette variable.

Estimator: Linear regression with covariates

Estimateur : la régression linéaire avec des covariables

```
lm_robust(Energy ~ Coffee + Sporty_Sportive, data = df)
```

Statistical models

Model 1

(Intercept)

0.24

(0.16)

Coffee

0.51**

(0.18)

Estimator: Linear regression with covariates

Estimateur : la régression linéaire avec des covariables

Statistical models

Model 1

(Intercept)

0.77***

(0.15)

Coffee

0.51*

(0.21)

R2