

# Estimation and Hypothesis Testing 2 | *Les estimateurs et les tests d'hypothèses 2*

Adikath + Macartan; Vin + Yannick

2026-06-12

## A Quick Reminder

### *Un petit rappel*

- Remember: Analyze as you randomize
  - We prefer estimators that are unbiased and have greater precision
  - Hypothesis testing can be simple with linear regression
- N'oubliez pas : analysez comme vous randomisez
  - Nous préférons les estimateurs non biaisés et plus précis
  - Les tests d'hypothèse peuvent être simples avec la régression linéaire

## Section 1

# Multiple Arm Experiments

## Estimator 1: Difference-in-Means

### *Estimateur 1 : La différence en moyennes*

$Z_A$  only    $Z_B$  only   Neither (control)

- We can always take the difference-in-means between any two groups.
- Nous pouvons toujours tenir compte de la différence de moyennes entre deux groupes.

## Estimator 2: Linear regression

### Estimateur 2 : La régression linéaire

$$Y_i = \alpha + \beta_A Z_{Ai} + \beta_B Z_{Bi} + e_i$$

$$Y_i = \alpha + \beta_A Z_{Ai} + \beta_B Z_{Bi} + \gamma X_i + e_i$$

- Regression with an indicator variable for each of the two treatment arms.
  - $Z_{Ai} = 1$  if unit  $i$  has treatment  $Z_A$ , 0 otherwise
  - $Z_{Bi} = 1$  if unit  $i$  has treatment  $Z_B$ , 0 otherwise
- We can also do covariate adjustment at the same time.
- Régression avec une variable indicatrice pour chacun des deux bras de traitement.
  - $Z_{Ai} = 1$  si l'unité  $i$  a le traitement  $Z_A$ , sinon 0
  - $Z_{Bi} = 1$  si l'unité  $i$  a le traitement  $Z_B$ , sinon 0
- Nous pouvons également effectuer un ajustement covariable en même temps.

## Estimator 2: Linear regression

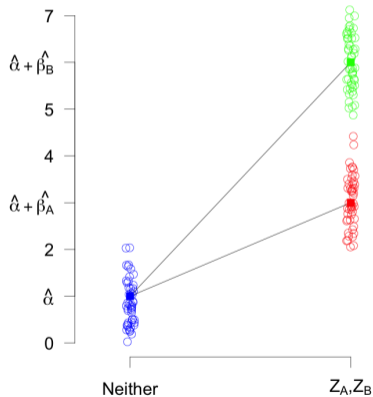
### Estimateur 2 : La régression linéaire

$$Y_i = \alpha + \beta_A Z_{Ai} + \beta_B Z_{Bi} + e_i$$

- $\hat{\beta}_A$  is the  $\widehat{ATE}$  of  $Z_A$  (compared with control).
  - $\hat{\beta}_B$  is the  $\widehat{ATE}$  of  $Z_B$  (compared with control).
  - How do we estimate the effect of  $Z_B$  compared to  $Z_A$ ?
- $\hat{\beta}_A$  est  $\widehat{ATE}$  de  $Z_A$  (par rapport au contrôle).
  - $\hat{\beta}_B$  est  $\widehat{ATE}$  de  $Z_B$  (par rapport au contrôle).
  - Comment estimer l'effet de  $Z_B$  par rapport à  $Z_A$  ?

## Estimator 2: Linear regression

### Estimateur 2 : La régression linéaire



$Z_A$  only

$Z_B$  only

Neither (control)

$$Y_i = \alpha + \beta_A Z_{Ai} + \beta_B Z_{Bi} + e_i$$

# Estimators for Multi-arm Designs

*Les estimateurs pour les expériences avec plusieurs bras*

## Section 2

# Block Randomization

## Block Randomization

### *Randomisation par bloc*

- Block randomization is like doing a separate experiment in each block.
- We present 2 estimators for block randomization. Others are also available.
- La randomisation par bloc est comme faire une expérience distincte dans chaque bloc.
- Nous présentons 2 estimateurs pour la randomisation par bloc. D'autres sont également disponibles.

## Estimator 1: Blocked Difference-in-Means

### *Estimateur 1 : La différence des moyennes par bloc*

- Calculate the  $\widehat{ATE}_j$  for each block using difference in means.  $j$  indicates which block.
  - The  $\widehat{ATE}$  is the average of the block-level  $\widehat{ATE}_j$  weighted by block size  $N_j/N$ .
  - You can use this estimator even when the probability of treatment assignment is different by blocks.
- Calculez  $\widehat{ATE}_j$  pour chaque bloc en utilisant la différence des moyennes.
  - $\widehat{ATE}$  est la moyenne pondérée de  $\widehat{ATE}_j$  pondérée par la taille du bloc  $N_j/N$ .
  - Nous pouvons utiliser cet estimateur même si la probabilité d'assignation du traitement diffère selon les blocs.

## Estimator 1: Blocked Difference-in-Means

*Estimateur 1 : La différence des moyennes par bloc*

Unit	Block	$Z_i$	$Y_i$
a	Q	0	4
b	Q	1	3
c	Q	0	2
d	R	1	3
e	R	0	0
f	R	0	2
g	S	1	4
h	S	0	0
i	S	0	2
j	S	1	4

$$\widehat{ATE}_Q = \frac{3}{1} - \frac{4+2}{2} = 0$$

$$\widehat{ATE}_R = \frac{3}{1} - \frac{0+2}{2} = 2$$

$$\widehat{ATE}_S = \frac{4+4}{2} - \frac{0+2}{2} = 3$$

$$\begin{aligned}\widehat{ATE} &= \frac{N_Q}{N} \widehat{ATE}_Q + \frac{N_R}{N} \widehat{ATE}_R + \frac{N_S}{N} \widehat{ATE}_S \\ &= \frac{3}{10} * 0 + \frac{3}{10} * 2 + \frac{4}{10} * 3 = \frac{9}{5}\end{aligned}$$

## Estimator 2: Linear Regression with Block Fixed Effects

### *Estimateur 2 : La régression linéaire avec effets fixes par bloc*

$$Y_{ij} = \alpha_0 + \beta_1 Z_{ij} + \gamma_A \text{Block}A_{ij} + \gamma_B \text{Block}B_{ij} + \dots + \epsilon_{ij}$$

- You can use linear regression with block fixed effects, applying weights to each observation.
- The weight is the inverse of the proportion of subjects in the same block who were assigned to the same condition.
- Nous pouvons utiliser la régression linéaire avec des effets fixes par bloc, en appliquant des pondérations à chaque observation.
- Le poids est l'inverse de la proportion de sujets d'un même bloc assignés à la même condition.

$$w_{ij} = \frac{z_i}{p_{ij}} + \frac{1 - z_i}{1 - p_{ij}}, \text{ where } p_{ij} \equiv \frac{m_j}{N_j}$$

## Block randomization in R

### *Randomisation par bloc en R*

```
library(estimatr)
difference_in_means(Y ~ t, blocks = block_
lm_robust(Y ~ treatment + as.factor(block_
           weights = weight_variable)
```

```
library(estimatr)
difference_in_means(Y ~ t, blocks = block_
lm_robust(Y ~ treatment + as.factor(block_
           weights = weight_variable)
```

## Section 3

# Cluster Randomization

## Estimator: Regression with cluster-robust standard errors

*Estimateur : La régression avec des erreurs types robustes au niveau du cluster*

$$Y_{ic} = \alpha_0 + \beta_1 Z_c + e_{ic}$$

$$Y_{ic} = \alpha_0 + \beta_1 Z_c + \gamma X_{ic} + e_{ic}$$

- Our analysis has to take into account the fact that treatment is assigned at the cluster level with *cluster-robust standard errors*.
- $\hat{\beta}_1$  is the  $\widehat{ATE}$  of the treatment on individual units.
- We can also do covariate adjustment at the same time.
- Notre analyse doit prendre en compte le fait que le traitement est attribué au niveau du cluster avec des *erreurs types robustes au niveau du cluster*.
- $\hat{\beta}_1$  est  $\widehat{ATE}$  du traitement sur les unités individuelles.
- Nous pouvons également effectuer un ajustement covariable en même temps.

# Cluster randomization

## Randomisation par grappe

**Table 2 | Effect of treatment on movement outcomes**

Campaign	Outcome	Period	Mean (95% CI)		OLS model			Number of days × counties
			High-intensity county	Low-intensity county	High-intensity county (95% CI)	P value	RI P value	
Both campaigns	Distance traveled	From day – 3 to day – 1	–4.384 (–4.973, –3.796)	–3.603 (–4.254, –2.952)	–0.993 (–1.616, –0.371)	0.002	0.002	4,059
Both campaigns	Share ever left home	Thanksgiving (26 November) or Christmas (24–25 December)	72.326 (72.012, 72.639)	72.381 (72.092, 72.670)	0.030 (–0.361, 0.420)	0.881	0.911	2,017
Thanksgiving	Distance traveled	From day – 3 to day – 1	–6.082 (–6.822, –5.341)	–5.320 (–6.113, –4.527)	–0.924 (–1.785, –0.063)	0.035	0.030	2,072
Thanksgiving	Share ever left home	Thanksgiving (26 November)	71.308 (70.885, 71.731)	71.468 (71.071, 71.866)	0.012 (–0.438, 0.461)	0.959	0.966	689
Christmas	Distance traveled	From day – 3 to day – 1	–2.603 (–3.279, –1.927)	–1.823 (–2.588, –1.057)	–1.041 (–1.847, –0.235)	0.011	0.008	1,987
Christmas	Share ever left home	Christmas (24–25 December)	72.859 (72.507, 73.210)	72.852 (72.520, 73.185)	0.095 (–0.289, 0.479)	0.629	0.580	1,328

The control and treatment means at the county level and different periods, in addition to the estimate of the treatment coefficient in Eq. (1). Standard errors are clustered at the county level. 95% CIs are reported in parentheses. P values are based on a two-sided test. RI P values are computed using randomization inference, accounting for the two-stage design.

```
library(estimatr)
lm_robust(Y ~ treatment, clusters = cluster)
lm_robust(Y ~ treatment + covariate, clusters = cluster)
```

```
library(estimatr)
lm_robust(Y ~ treatment, clusters = cluster)
lm_robust(Y ~ treatment + covariate, clusters = cluster)
```

## Section 4

# Factorial Design

## Estimator 1: Difference-in-Means

### Estimateur 1 : La différence en moyennes

	$Z_2 = 0$	$Z_2 = 1$	Effect of $Z_2$
$Z_1 = 0$	Neither	$Z_2$ only	$\beta_2$
$Z_1 = 1$	$Z_1$ only	Both $Z_1$ and $Z_2$	$\beta_2 + \beta_3$
Effect of $Z_1$	$\beta_1$	$\beta_1 + \beta_3$	$\beta_3$ (diff-in-diff)

- We use factorial design when we are interested in interaction effects.
- If we have a  $2 \times 2$  factorial design, we have four groups.
- We can always take the difference-in-means between any two groups.
- Nous utilisons un plan factoriel quand nous nous intéressons aux effets d'interaction.
- Si nous avons une conception factorielle  $2 \times 2$ , nous avons 4 groupes.
- Nous pouvons toujours tenir compte de la différence de moyennes entre deux groupes.

## Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term

### *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \beta_3 Z_{1i} * Z_{2i} + e_i$$

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \beta_3 Z_{1i} * Z_{2i} + \gamma X_i + e_i$$

- Indicator variables for  $Z_1$  and  $Z_2$ .
- We can also do covariate adjustment at the same time.
- Variables indicatrices pour  $Z_1$  et  $Z_2$ .
- Nous pouvons également effectuer un ajustement covariable en même temps.

## Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term

### Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction

	$Z_2 = 1$	$Z_2 = 0$
$Z_1 = 1$	Both $Z_1$ and $Z_2$	$Z_1$ <b>only</b>
$Z_1 = 0$	$Z_2$ only	<b>Neither</b>

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \beta_3 Z_{1i} * Z_{2i} + e_i$$

- Estimand:  $E[Y(Z_1 = 1)|Z_2 = 0] - E[Y(Z_1 = 0)|Z_2 = 0]$
- $\hat{\beta}_1$  is the  $\widehat{ATE}$  of  $Z_1$  conditional on  $Z_2 = 0$ .
- Paramètre :  $E[Y(Z_1 = 1)|Z_2 = 0] - E[Y(Z_1 = 0)|Z_2 = 0]$
- $\widehat{ATE}$  de  $Z_1$  conditionnel à  $Z_2 = 0$ .

## Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term

### Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction

	$Z_2 = 1$	$Z_2 = 0$
$Z_1 = 1$	<b>Both <math>Z_1</math> and <math>Z_2</math></b>	$Z_1$ only
$Z_1 = 0$	$Z_2$ <b>only</b>	Neither

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \beta_3 Z_{1i} * Z_{2i} + e_i$$

- Estimand:  $E[Y(Z_1 = 1)|Z_2 = 1] - E[Y(Z_1 = 0)|Z_2 = 1]$
- $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 = \widehat{ATE}$  of  $Z_1$  conditional on  $Z_2 = 1$
- $\beta_3$  is called the interaction effect.
- Paramètre :  $E[Y(Z_1 = 1)|Z_2 = 1] - E[Y(Z_1 = 0)|Z_2 = 1]$
- $\widehat{ATE}$  de  $Z_1$  conditionnel à  $Z_2 = 1$
- $\beta_3$  est appelé l'effet d'interaction.

## Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term

### *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

```
lm_robust(Energy ~ Coffee * Sport, data = df)
```

Statistical models

Model 1

(Intercept)

0.15

(0.14)

Coffee

0.42\*

(0.19)

## Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term

### Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction

---

$\hat{Y}   \text{Coffee} = 0, \text{Sport} = 0$	$\hat{\alpha} = 0.154$
$\hat{Y}   \text{Coffee} = 0, \text{Sport} = 1$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_2 = 0.424$
$\hat{Y}   \text{Coffee} = 1, \text{Sport} = 0$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 = 0.576$
$\hat{Y}   \text{Coffee} = 1, \text{Sport} = 1$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 1.105$
$\widehat{ATE}$ of Coffee   Sport = 0	$\hat{\beta}_1 = 0.422$
$\widehat{ATE}$ of Coffee   Sport = 1	$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 = 0.681$
Interaction effect	$\hat{\beta}_3 = 0.260$

---

---

$\hat{Y}   \text{Coffee} = 0, \text{Sport} = 0$	$\hat{\alpha} = 0.154$
$\hat{Y}   \text{Coffee} = 0, \text{Sport} = 1$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_2 = 0.424$
$\hat{Y}   \text{Coffee} = 1, \text{Sport} = 0$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 = 0.576$
$\hat{Y}   \text{Coffee} = 1, \text{Sport} = 1$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 1.105$
$\widehat{ATE}$ de Coffee   Sport = 0	$\hat{\beta}_1 = 0.422$
$\widehat{ATE}$ de Coffee   Sport = 1	$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 = 0.681$
Effet d'interaction	$\hat{\beta}_3 = 0.260$

---

$$\hat{Y} = 0.154 + 0.422 \times \text{Coffee} + 0.270 \times \text{Sport} + 0.260 \times \text{Coffee} \times \text{Sport}$$

## Section 5

# Encouragement design

## Encouragement design

### *Conception incitative*

- Situation: You can't force people to take (receive) your treatment. Treatment assigned is not the same as treatment received.
  - We can randomize **encouragement**  $Z$  to take the treatment, such as a request to drink coffee or offering a subsidy to participate in a program.
  - We measure the encouragement  $Z$ , taking the treatment  $D$ , and the outcome  $Y$ .
  - We analyze using instrumental variables techniques (two stage least squares).
- Situation : vous ne pouvez pas forcer les gens à prendre (recevoir) le traitement. Le traitement assigné n'est pas le même que le traitement reçu.
  - Nous pouvons randomiser l'**incitation**  $Z$  à suivre le traitement, par exemple en demandant de boire un café ou en offrant une subvention.
  - On mesure l'incitation  $Z$ , le traitement reçu  $D$ , et le résultat  $Y$ .
  - Nous analysons à l'aide de techniques de variables instrumentales (moindres carrés en deux étapes).

## Encouragement design: Code

### *Conception incitative: Code*

```
df <- fabricate(N = 1000, Z = complete_ra(N),  
               complier = complete_ra(N),  
               D = Z*complier,  
               Y = complier + D + rnorm(N)/100)  
  
df |> head() |> kable()
```

ID	Z	complier	D	Y
0001	1	1	1	1.9865329
0002	0	0	0	0.0117194
0003	0	0	0	-0.0190874
0004	0	0	0	-0.0100439
0005	0	0	0	0.0067669
0006	1	1	1	2.0115232

## Encouragement design: Code

### *Conception incitative: Code*

```
list(  
  ITT = lm_robust(Y ~ Z, data = df),  
  WRONG = lm_robust(Y ~ D, data = df),  
  CACE = iv_robust(Y ~ D | Z, data = df)) |>  
texreg::htmlreg(include.ci = FALSE,)
```

Statistical models

ITT

WRONG

CACE

(Intercept)

0.52\*\*\*

0.34\*\*\*